جامعة البعث
كلية العلوم

قسم الرياضيات
السنة الثانية

العام الدراسي : 2017 / 2018

بنى جبرية (١)

المحاضرة النظرية الأولى
(المحاضرة التمهيدية)

إعداد :
داني محفوض – وهب الحسن

Facebook: Dani Mahfoud
Facebook: Wahab Al-Hasan

تمهيد عام للبنى الجبرية :

في السنة الأولى من قسم الرياضيات ، وُضع مقرري الجبر الخطي -1- و الجبر الخطي -2- ، ليكونا الإنطلاقة الأولية للطالب في مواضيع الجبر المجرّد ، فكما لاحظنا كان موضوع الفضاء الشعاعي و دراسة التطبيقات بأشكالها و حالاتها الخاصة المختلفة - أحد أهم المباحث التي يتمحور حولها هذين المقررين .

و الآن في السنة الثانية وُضع مقرري البنى الجبرية (1) و البنى الجبرية (2) و في السنة الثالثة مقرر البنى الجبرية (3) و ذلك لنكمل مسيرتنا في مواضيع الجبر المجرد ، ولكن بشكلٍ تجريدياً و تخصصياً أكثر مما كانت عليه مقررات الجبر في السنة الأولى .

فلقد خُصِّصت مادة البنى الجبرية (1) لدراسة نظرية الزمر ، و البنى الجبرية (2) لدراسة الحلقات ، و البنى الجبرية (3) لدراسة الموديولات .

و قبل التمهيد لدراسة نظرية الزمرة ، يجب أن ننوّه ، إلى مدى الإرتباط الوثيق بين مادة البنى (1) و البنى (2) ، حيث أن الخلاف الوحيد بين المادتين هو البنية الجبرية التي تتم دراستها ، فكما ذكرنا في البنى (1) سندرس الزمرة و في البنى (2) سندرس الحلقة ، فأمّا النظريات التي سيتم ←

سيتم تناولها في المادتين متشابهتين الحد مكنين

---

* إنَّ أهمّ المواضيع الواجب إتقانها قبل الخوض في دراسة نظرية الزمر، هو «نظرية المجموعات» وَ ذلك سيكون محور دراستنا في البحث الأوَّل من المادة، وستبدأ دراستنا لنظرية المجموعات في المحاضرة القادمة، حيث سنبدأ بدراسة المعنى الفطري لاصطلاح المجموعة وصولاً للمعنى الرياضي له، بمعنى ـــ دراسة مفهوم البنية الجبرية وَ مفهوم قانون التشكيل وَ العلاقة الثنائية وَ أنواع العلاقات وَ علاقة التكافؤ وَ صف التكافؤ وَ العلاقة بين صفي التكافؤ وَ مفهوم تجزئة المجموعة وَ قدرة المجموعة، وَ علاقات الترتيب الجزئي وَ الكلي وَ مفهوم العنصر الأصغري وَ الأصغر وَ الأكبري وَ الأكبر وَ الحدود الدنيا وَ الدنيا الأعظمية وَ العليا وَ العليا الأصغرية ـــ

إذاً ما الذي سيتم دراسته في هذه المحاضرة ؟

سنقوم بمراجعة بعض المفاهيم الأساسية التي أخذت سابقاً ـــ

أولاً : طبيعة الأعداد :

ما نقصده بدراسة طبيعة الأعداد هو دراسة مجموعات الأعداد، وَ هذه تحدد المجموعات الهامة من ←

الهامة في الرياضيات عامة، و إن مجموعة الأعداد الطبيعية هي نقطة الانطلاق لهذه المجموعات و ذلك لأنها كانت أولى مجموعات الأعداد التي استخدمها الإنسان في حياته العملية.

* إن مجموعة الأعداد الطبيعية هي تلك المجموعة المكونة من الأعداد 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و ---- و نرمز لها بالرمز N

* إذا أضفنا إلى مجموعة الأعداد الطبيعية N الصفر و الأعداد الصحيحة نحصل على مجموعة الأعداد الصحيحة Z : $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$

* و إذا أخذنا تلك الأعداد التي يمكن التعبير عنها بحاصل قسمة عدد صحيح على عدد طبيعي و نرمز لها بالرمز Q : $Q = \{x \,;\, x = \frac{a}{b} \,;\, a \in Z ; b \in N\}$

و تسمى مجموعة الأعداد العادية أو القياسية.

* قلنا أن العدد العادي هو كل عدد يكتب بصورة قسمة عددين صحيح على طبيعي، فإذا كان حاصل قسمة هذين العددين هو عدد منتهي مثل: $\frac{1}{4} = 0,25$ نقول أن هذا العدد هو عدد عشري إذا كان تعبيرنا عن حاصل القسمة، و نقول كسر عشري إذا كان تعبيرنا عن الكسر.

* و إذا كان حاصل القسمة هو عدد غير منتهي (أو دوري) عندها نقول عن العدد أنه عدد نسبي إذا كان تعبيرنا عن حاصل القسمة و نقول عدد غير

عدد غير عادي إذا كان تعبيرنا عن الكسر.

* نقول عن العدد أنه عشري إذا أمكن كتابته بالشكل $a.10^n$ ، فمثلاً $\frac{1}{2}=0,5$ ، $\frac{1}{2}$ هو كسر عشري ، و $0,5$ هو عدد عشري لأننا نستطيع كتابته بالشكل $a.10^n$ كمايلي : 5.10^{-1} ، حيث $n=-1$ ، $a=5$

و مثال آخر : $\sqrt{2}=1,41421$---- هو عدد نسبي و لا نقول عشري لأنه غير منتهي و لا يمكن كتابته بالشكل $a.10^n$ ، حيث $|n|$ تدل على عدد المراتب التي على يمين الفاصلة ، و هنا لا نعرف كم عدد بعد الفاصلة لأنه عدد غير منتهي . و كذلك العدد النيبري e : $e=2,718281828459045$---- و كذلك العدد الثابت : $\pi=\frac{22}{7}=2,71828$....

* إذا قمنا بضم الأعداد العادية إلى الأعداد الغير عادية سيكون لدينا كل الأعداد "البديهية" و نسميها ونسميها مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز بالرمز $\mathbb{R}$ ، و هذه المجموعة تضم كل مجموعات الأعداد "المنطقية".

قلنا الأعداد <u>البديهية</u> فقط لكي نستثني منها الأعداد التخيلية أو العقدية و التي يقوم أساسها على العدد التخيلي $i=\sqrt{-1}$ ، و التي كل عدد منها يأخذ الصورة : $a+bi$ حيث نسمي a قسم حقيقي و bi قسم تخيلي .

انتهت

ملاحظة : مجموعة الأعداد العقدية تضم كافة أنواع مجموعات الأعداد .

ثانياً: أدوات الربط المنطقية بين القضايا:

من الواضح أننا في صلب دراستنا وكتابتنا للعلاقات على وجه الخصوص، نحتاج إلى إتقان المبادئ المنطقية التي تمكننا من الكتابة الحاوية على نتاج تفكير سليم و مصان من الخطأ، و على ذلك خصصت هذه الفقرة لدراسة بعض القواعد التي تمكننا من طرق الإستدلال الصحيح، بمعنى تجنب الوقوع في الخطأ أثناء كتابة معلومات رياضية ... نكتب في البداية تعريفاً بسيطاً لمصطلح «القضية»: القضية هي جملة تقوم على عدد من الكلمات المفهومة و التي بترابطها تكون معلومات.

تقسم القضية إلى قسمين:

1- القضية الإخبارية: و هي تلك القضية التي تخبر عن حقيقة ما. فمثلاً: عندما نقول أن العدد (-3) ينتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة، أو مثلاً عندما نقول $(1+1=2)$، هذه قضايا إخبارية.

2- القضية الإنشائية: و هي تلك القضية التي تعبر عن معلومة عادية و غير مهمة و لا تقدم للمتلقي شيئاً فعلياً. فمثلاً: عندما نقول ليكن لدينا العنصر x و نتوقف عن الكلام، هذه قضية إنشائية.

سنذكر فيما يلي ملاحظة هامة جداً توضح لنا الترميزات الخاصة بالربط بين قضية إخبارية و معلومة أخرى أو بين قضية إنشائية و معلومة أخرى.

سنفهم الملاحظة من خلال طرح الأمثلة التالية :

★ أياً كان العنصر (العدد) x من مجموعة الأعداد الحقيقية ، و العدد y من مجموعة الأعداد الحقيقية ، وكان حاصل جمع x و y يساوي الصفر ، فإنّ العنصرين x و y متناظرين أي : $x=-y$ و $y=-x$.

كيف أكتب ما سبق بالترميزات الرياضية ؟

لاحظ ـــ

$$\forall\, x , y \in \mathbb{R} \; ; \; x+y=0 \Rightarrow x=-y$$

- $\forall$ ← أياً كان
- $,$ ← و
- $\in$ ← ينتميان
- $;$ ← وبحيث أنّ
- $\Rightarrow$ ← عندها يكون - هذا يؤدي

($\Rightarrow$): لاحظ أنّ هذه الإشارة تربط بين قضية إخبارية (هي أنّ ناتج جمع x و y يساوي صفر) ، وبين معلومة ($x=-y$) و التي نستنتج صحتها من خلال فرضنا لصحة القضية ($x+y=0$) . و لو كنا قد فرضنا أنّ هذه القضية خاطئة لكانت المعلومة $x=-y$ أيضاً خاطئة .

($;$): لاحظ أنّ هذه الإشارة تربط بين القضية الإنشائية (لدينا عنصران من مجموعة الأعداد الحقيقية) وبين معلومة أخرى هي (جمع العنصرين يساوي صفر) وهذه المعلومة نحن نفترض صحتها ، أي أنها قضية إخبارية .

وَ الملاحظة هي أنّ نميّز بين الرمز (⇐) وَ الرمز (ز).

- فالرمز (⇐) يشير إلى الاستدلال، أي من معلومة أوْ الأصح أنْ نحول قضية إخبارية إلى معلومة أخرى. مثال القاعدة أوْ الخلاصة التي نسعى لتوضيحها......

- فأما الرمز (ز) فتشير إلى أننا نربط بين قضية إنشائية ومعلومة أخرى وفي المثال كانت القضية الإنشائية هي وجود العنصرين x وَ y في $\mathbb{R}$ وَ المعلومة الأخرى مثلت قضية إخبارية وهي أننا فرضنا أنّ $x+y=0$.

مثال آخر: عندما نقوم بحل المعادلة $2x=x+1$

لاحظ أداة الربط بين خطوات الحل:

$$2x = x+1 \boxed{\Rightarrow} 2x - x = 1 \boxed{\Rightarrow} x = 1$$

لاحظ أنّ هذه الأداة تربط بين قضايا إخبارية

وَ لا يجوز استبدالها بالأداة (ز).

فيما يلي سوف ندرس **القضايا المركبة**:

في البداية سوف نذكر أدوات الربط التي تستخدم في القضايا المركبة.

1 - ($\wedge$) وَ تعني (وَ) أي قضية مع قضية.

2 - ($\vee$) وَ تعني (أوْ) أي قضية أوْ قضية.

تفيد هذه الأدوات بأنه يمكننا أنْ نوضح وَ نبين قضايا جديدة من مثل معطاة من القضايا بواسطة أدوات الربط هذه.

مثال: عندما نقول مثلاً: إنَّ مادة البن الجبرية هي مادة مهلة، ونرمز لهذه القضية بالرمز A.
ونقول أنَّ مادة البن الجبرية هي مادة ممتعة و نرمز لهذه القضية بالرمز B.

* فإذا أردنا أن نقول أن مادة البن هي مهلة وَ ممتعة نكتب: A∧B.

* وإذا أردنا أن نقول أنَّ مادة البن مهلة أَوْ ممتعة نكتب: A∨B.

تسمى الأداة (∧) أداة عطف، و سندرس فيما يلي ما يسمى بجدول الحقيقة لهذه الأداة:
يفيد جدول الحقيقة بأنه يمكننا من معرفة متى تكون القضية المركبة A∧B هي قضية صحيحة وَ متى تكون خاطئة.
سنرمز بـ (1) للقضية الصحيحة وَ (0) للقضية الخاطئة:

A	B	A∧B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

أي أنَّ قضية عطف القضيتين A وَ B أي ←

أي القضية $A \wedge B$ تكون صحيحة إذا كانت القضيتين A و B كل منهما قضية صحيحة.

و تكون القضية المركبة $A \wedge B$ قضية خاطئة إذا كانت إحدى القضيتين خاطئة أو عندما تكون كلتا القضيتين A و B خاطئتين.

تسمى الأداة (V) أداة فصل ، وسندرس جدول الحقيقة للقضية المركبة بالفصل بين قضيتين :

A	B	A V B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

أي تكون القضية المركبة A V B قضية صحيحة عندما تكون إحدى القضيتين A أو B قضية صحيحة و الأخرى خاطئة ، أو: عندما تكون كلتا القضيتين صحيحتين.

و تكون القضية المركبة A V B قضية خاطئة عندما تكون كلتا القضيتين A و B هما قضيتين خاطئتين.

★ أداة الاستلزام (⇒) :

تكون (القضية A تستلزم القضية B) صحيحة إذا كانت كلتا القضيتين خاطئتين ، أو إذا كانت كلتا القضيتين صحيحتين ، أو إذا كانت القضية A خاطئة و القضية B صحيحة .

و تكون (القضية A تستلزم القضية B ، أي القضية المركبة (A ⇒ B) خاطئة فقط إذا كانت القضية A صحيحة و القضية B خاطئة .

★ أداة التكافؤ (⇔) :

قضية تكافؤ قضيتين A و B هي قضية عطف القضيتين : الأولى هي قضية استلزام A لـ B و الثانية هي قضية استلزام B لـ A .

أي أن تكافؤ القضيتين A و B هي :

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

و نرمز لقضية تكافؤ القضيتين A و B (أي للقضية المركبة $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$)

بالرمز : $A \Leftrightarrow B$.

متى تكون القضية المركبة $(A \Leftrightarrow B)$ قضية صحيحة و متى تكون قضية خاطئة ؟

تكون $(A \Leftrightarrow B)$ صحيحة إذا كانت القضيتين A و B صحيحتين معاً ، أو إذا كانت القضيتين A و B خاطئتين معاً .

ملاحظة: ⟺ - الشرط اللازم والكافي
- إذا وفقط إذا

جدول الحقيقة:

A	B	A⟺B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

انتهت

ثالثاً: تذكرة بمفهوم التطبيق وأنواعه:

1- مفهوم التطبيق:

نقول عن العلاقة من مجموعة X إلى مجموعة Y أنها تطبيق إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة X يقابله عنصر واحد فقط في المجموعة Y.

أي كل عنصر من عناصر X تظهر صورته مرة واحدة فقط في المنطلق.

نسمي المجموعة X المنطلق والمجموعة Y المستقر والعلاقة التي تربط كل عنصر من المنطلق بعنصر واحد فقط في المستقر بـ قاعدة ربط التطبيق:

أمثلة: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$f: a \mapsto a^2$

لاحظ أنَّ $f(a) = a^2$ هو تطبيق لأنَّ

كل عنصر من المنطلق يرتبط بعنصر واحد فقط ←

فقط من المستقر.

مثال ثاني: بينما لاحظ: $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T: a \mapsto \sqrt{a}$; $f(a) = \sqrt{a}$

واضح أنّ هذا ليس تطبيق وذلك لأنّ كل عنصر من المنطلق له صورتين في المستقر.

أي مثلاً $f(9) = -3$ و $+3$

مثال ثالث: في الحياة نلاحظ أنّ علاقة الأمومة تمثل تطبيق، فكل شخص يرتبط بأم واحدة وله أم واحدة وليس أكثر من أم.

---

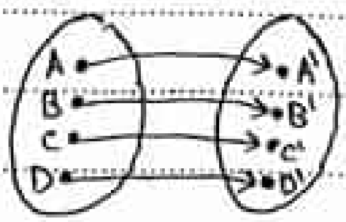
2 - مفهوم التطبيق المتباين:

نقول عن التطبيق أنه متباين إذا كان كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من المنطلق:

$$\forall x, y \in X ; \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$\forall x, y \in X ; \ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

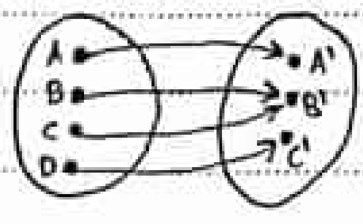
★ بمعنى أنه لا يجوز أن يكون هناك صورة لأكثر من عنصر في المنطلق.



تطبيق متباين

A → A'　　B → B'

C → C'　　D → D'



تطبيق غير متباين

لاحظ أنّ لـ B و C نفس الصورة وهي B'.